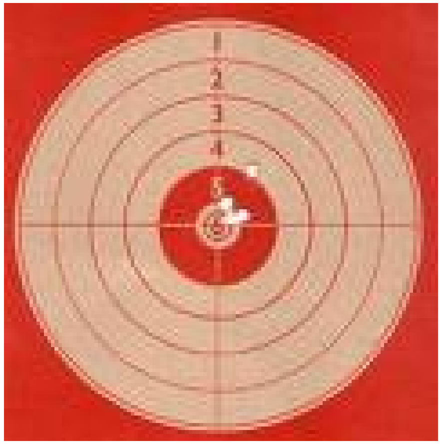
Mathématiques

Module No 05

Arithmétique

Objectifs pédagogiques

- Rappeler les principes de la division euclidienne et les diviseurs d'un nombre entier
- Reconnaître ou rendre une fraction irréductible

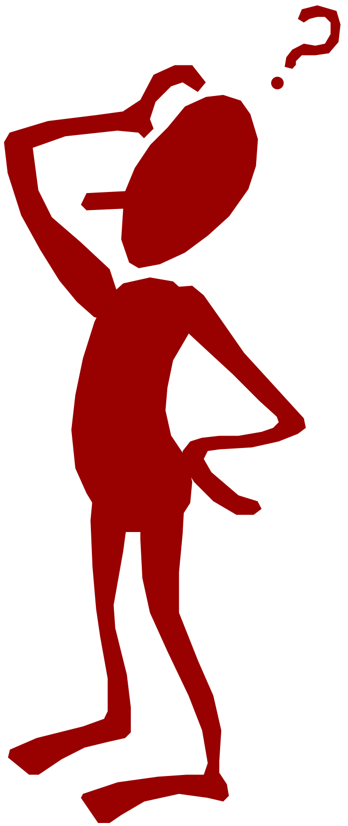


Plan

- Rappels : division euclidienne et nombre entier
- Divisibilité
- Plus Grand Diviseur Commun (PGCD)
- Fractions irréductibles

Une série de questions

- Qu'est ce qu'une division euclidienne ?
- Quels sont les diviseurs d'un nombre entier ?
- Qu'est ce que le PGCD ? Comment le calculer ?
- Comment reconnaître une fraction irréductible ?
- Comment rendre une fraction irréductible ?



Division euclidienne

- a et b désignent deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$
- Effectuer la division euclidienne de a par b signifie déterminer deux nombres entiers positifs q et r tel que: $a=b\times q+r$ et $r<b$
- q s'appelle le **quotient entier** et r s'appelle le **reste**.
- Exemple: $155=4\times 38+3$ et $3<4$
- Dans la division euclidienne de 155 (dividende) par 4 (diviseur), le quotient entier est 38 et le reste est 3

Diviseur d'un nombre entier

- a et b désignent deux nombres entiers positifs avec $b \neq 0$
- On dit que b est un **diviseur** de a lorsqu'il existe un nombre entier positif n tel que $a = n \times b$
- Exemple: $60 = 12 \times 5$ donc 5 est 12 sont des diviseurs de 60.
- Les diviseurs de 60 sont: 1, 2, 3, 4, **5**, 6, 10, **12**, 15, 20, 30, 60.
- Si b est un diviseur de a, le reste de la division euclidienne de a par b est nul
- Si b est un diviseur de a, alors a est un **multiple**

Diviseur d'un nombre entier

- Définition: un nombre entier positif qui admet exactement 2 diviseurs (1 et lui-même est un **nombre premier**
- Propriété: un nombre entier strictement supérieur à 1 admet au moins 2 diviseurs: 1 et lui-même
- 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et 19 sont des nombres entiers
- 0, 1, 4, 9 ne sont pas des nombres entiers

Critères de divisibilité

- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0, 2, 4, 6, 8, alors il est divisible par 2
- Si un nombre entier a pour chiffre des unités 0 ou 5, alors il est divisible par 5.
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 3, alors ce nombre est divisible par 3
- Si la somme des chiffres d'un nombre entier est divisible par 9, alors ce nombre est divisible par 9

Notion P.G.C.D

- Définition: si a et b désignent un nombre entier strictement positif, le **plus grand des diviseurs communs** à a et b s'appellent le PGCD et se note **PGCD** (a;b)
- Exemple: les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12; les diviseurs de 15 sont 1, 3, 5, 15; PGCD (12;15)=3
- Propriétés:
- PGCD (a;a)=a
- PGCD (b;a)=PGCD (a;b)
- Si b est un diviseur de a, alors PGCD (a;b)=b

PGCD : Un exercice

- Exercice :
- PGCD de 12 et 18

- Sélectionner la bonne réponse

1	2	☐
2	3	☐
3	4	☐
4	6	☐
5	12	☐

PGCD : Un exercice

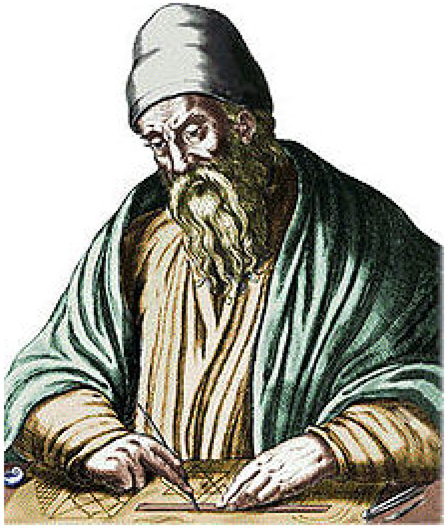
- Exercice :
- PGCD de 12 et 18

- Sélectionner la bonne réponse

1	2	☐
2	3	☐
3	4	☐
4	6	☑
5	12	☐

Recherche du PGCD : Algorithme d'Euclide

- Euclide, en grec ancien Εὐκλεί̓δης Eukleidês (né vers -325, mort vers -265 à Alexandrie) est un mathématicien de la Grèce antique, auteur des Éléments, qui sont considérés comme l'un des textes fondateurs des mathématiques modernes



Recherche du PGCD : Algorithme d'Euclide

- Définition: si a et b désignent un nombre entier strictement positif, le **plus grand des diviseurs communs** à a et b s'appellent le PGCD et se note **PGCD** (a;b)
- Exemple: les diviseurs de 12 sont 1, 2, 3, 4, 6, 12; les diviseurs de 15 sont 1, 3, 5, 15; PGCD (12;15)=3
- Propriétés:
- PGCD (a;a)=a
- PGCD (b;a)=PGCD (a;b)
- Si b est un diviseur de a, alors PGCD (a;b)=b

Recherche du PGCD : Algorithme d'Euclide

- L'algorithme d'Euclide permet de déterminer le PGCD de deux entiers naturels non nuls a et b tels que a>b.
- On effectue la division de a par b. On appelle q1 le quotient obtenu et r1 le reste.
- On effectue la division de b par r1. On appelle q2 le quotient obtenu et r2 le reste.
- Et ainsi de suite….
- Le dernier reste non nul est le PGCD de a et b

Nombres premiers entre eux

- Deux nombres sont premiers entre eux si leur PGCD est égal à 1

Fraction irréductible

- La fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux.
- Si a et b ne sont pas premiers entre eux, la fraction $\frac{a}{b}$ est simplifiable.
- En divisant les deux entiers naturels a et b par D, leur PGCD, on obtient une fraction irréductible.

Avons-nous atteint nos objectifs ?

- Qu'est ce qu'une division euclidienne ?
- Quels sont les diviseurs d'un nombre entier ?
- Qu'est ce que le PGCD ? Comment le calculer ?
- Comment reconnaître une fraction irréductible ?
- Comment rendre une fraction irréductible ?