Module 21

MATHEMATIQUES

C01 - PROBABILITES – STATISTIQUES No 1

ETUDE ELEMENTAIRE DES PROBABILITES

Objectifs

- Réussir l'examen

Objectifs

- Réussir l'examen
- Acquérir des savoirs et des savoirs-faire applicables dans vos métiers

Objectifs

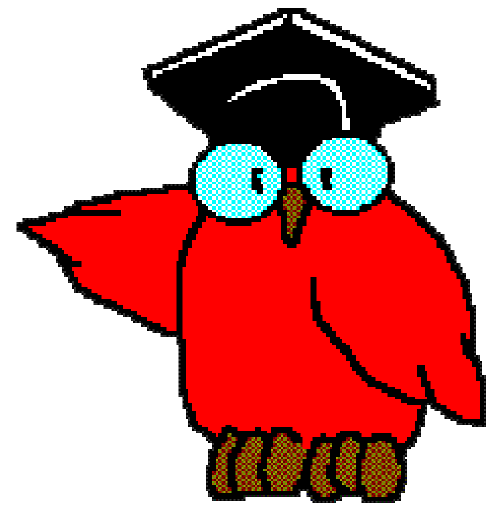
- Les Probabilités et statistiques fournissent, au sein de l'appareillage mathématique, les outils de traitement des données obtenus lors d'activités répétitives comme celles rencontrées dans les jeux de hasard, mais aussi dans
  - le marketing,
  - l'assurance,
  - l'agriculture,
  - la chimie,
  - la recherche médicale,
  - les processus industriels et logistiques .

Objectifs

- Nous utiliserons naturellement les exemples classiques empruntés aux jeux de dés et de cartes pour introduire les concepts de base …
- … mais nous essaierons aussi de ressentir l'intérêt -pas toujours évident- de ces concepts pour le manager et le gestionnaire.
- Ceci nous permettra entre autres :
- d'organiser des convois de ravitaillement
- d'analyser plusieurs risques en matière de production et de maintenance d'équipements industriels
- D'évaluer le risque d'un investissement dans une zone sensible
- De comprendre la problématique d'un acheteur
- De rechercher la coïncidence d'émission de pièces comptables
- d'évaluer la performance commerciale d'une filiale
- d'évaluer la probabilité pour qu'un lot de commandes concerne un équipement particulier …

Plan général

1. Etude élémentaire des probabilités
2. Notions d'analyse combinatoire (Arrangements, permutations, combinaisons, ..)
3. Règles du calcul des probabilités.
4. Probabilités composées et théorèmes de Bayes.
5. Variables aléatoires et lois de probabilité discrètes
6. Lois de probabilité continues



Calcul des probabilités

- C'est l'intégration du hasard, traduit mathématiquement en variable aléatoire, qui a permis de projeter dans l'avenir les résultats de la statistique descriptive et de faire de la statistique une discipline dynamique, aux domaines d'application illimités.

- Il ne s'agit plus seulement de décrire, mais d'interpréter et de prévoir.
- Le calcul des probabilités, sous l'impulsion de grands mathématiciens tels que Pascal, Fermat, Bernouilli, Huygens, Euler, Laplace et Gauss, va permettre à la statistique de devenir une véritable science.

Calcul des probabilités

- Il connaît un fort développement au XIXème siècle pour être appliqué aussi bien dans les sciences physiques que dans les sciences sociales.
- Au XXème siècle, la Recherche Opérationnelle fait beaucoup appel à la Théorie des Jeux.

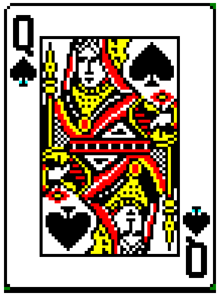
EPREUVE, EVENTUALITE ET EVENEMENT

- Considérons une **épreuve** probabiliste, par exemple le tirage d'une carte au hasard dans un jeu de cartes, le jet d'un dé ou le tirage d'une boule dans une urne.
- On désigne par **éventualité** chaque possibilité élémentaire et par **évènement** un ensemble d'éventualités. L'univers des possibles est l'ensemble des éventualités
- Une épreuve comporte n éventualités possibles également probables et s'excluant mutuellement.

EPREUVE, EVENTUALITE ET EVENEMENT

- Dans l'épreuve du jeu de dé, n'importe laquelle des 6 éventualités (chaque éventualité correspond à une face) a la même chance de survenir après lancement.

- Dans l'épreuve du jeu de cartes, n'importe laquelle des 52 éventualités (chaque éventualité correspond à une carte d'un jeu de 52) a la même chance de survenir après tirage si l'on remet la carte tirée dans le jeu.



PROBABILITE

- Décider de participer à un tournoi de bridge c'est espérer la victoire.
- Il est possible de vaincre à coup sûr si l'on reçoit les 13 cartes à pique. Cette distribution tient-elle du rêve ?
- Par définition, on ne sait si un évènement aléatoire va se produire ou non.
- Tout ce que l'on peut faire, c'est mesurer la probabilité d'apparition de cet évènement.
- Il existe deux définitions de la probabilité : l'une théorique, l'autre empirique.

PROBABILITE

- Dans le cas où l'univers des possibles est formé d'éventualités en nombre fini qui ont toutes autant de chances de se produire (équiprobabilité), la **probabilité théorique** est définie comme :

nombre de cas favorables
----
nombre total de cas possibles.

- Ainsi la probabilité qu'une pièce tombe sur son côté pile est de 1/2 (on négligera la probabilité qu'elle tombe sur la tranche).
- La probabilité de tirer un six avec un dé est de 1/6.

PROBABILITE

- Dans de nombreux cas, il est impossible de déterminer cette probabilité théorique.
- On a alors recours à l'expérimentation et on définit la **probabilité empirique** comme le rapport du nombre constaté d'occurences de l'évènement sur le nombre d'essais effectués.
- Plus le nombre d'essais est important, plus la probabilité empirique se rapproche de la probabilité théorique.
- Simulation

PROBABILITE

- Définissons un évènement A, par exemple le tirage d'un 8 de coeur, l'obtention d'une face affichant un nombre pair ou le tirage d'une boule blanche dans l'urne.
- Si parmi les n éventualités de notre épreuve, k sont favorable à l'événement A, la **probabilité** de celui-ci est égale à k/n :

$$P\{A\} = \frac{k}{n} = \frac{\text{Nombre d'éventualités équiprobables favorables}}{\text{Nombre d'éventualités équiprobables possibles}}$$

- Les éventualités sont encore appelées **évènements élémentaires**. L'ensemble de toutes les éventualités possibles constitue l'ensemble des évènements ou **ensemble fondamental** E.

PROBABILITE

Exemple 1. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer un huit de coeur ? Quelle est la probabilité de tirer un coeur ? Quelle est la probabilité de tirer un 8 ?

PROBABILITE

Exemple 1. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer un huit de coeur ? Quelle est la probabilité de tirer un coeur ? Quelle est la probabilité de tirer un 8 ?

$$P\ \{8 \text{ de coeur}\} = \frac{1}{52} = 0{,}02$$

PROBABILITE

Exemple 1. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer un huit de coeur ? Quelle est la probabilité de tirer un coeur ? Quelle est la probabilité de tirer un 8 ?

$$P\ \{8\text{ de coeur}\} = \frac{1}{52} = 0{,}02$$

$$P\ \{\text{coeur}\} = \frac{13}{52} = 0{,}25$$

PROBABILITE

Exemple 1. On tire une carte dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer un huit de coeur ? Quelle est la probabilité de tirer un coeur ? Quelle est la probabilité de tirer un 8 ?

$$P\,\{8 \text{ de coeur}\} = \frac{1}{52} = 0{,}02$$

$$P\,\{\text{coeur}\} = \frac{13}{52} = 0{,}25$$

$$P\,\{\text{huit}\} = \frac{4}{52} = 0{,}077$$

PROBABILITE

Exemple 2. On jette un dé. Quelle est la probabilité de tirer un six ? Quelle est la probabilité de tirer nombre pair?

PROBABILITE

Exemple 2. On jette un dé. Quelle est la probabilité de tirer un six ? Quelle est la probabilité de tirer nombre pair?

$$P\,\{six\} = \frac{1}{6} = 0{,}16$$

PROBABILITE

Exemple 2. On jette un dé. Quelle est la probabilité de tirer un six ? Quelle est la probabilité de tirer nombre pair?

$$P\ \{six\} = \frac{1}{6} = 0{,}16$$

$$P\ \{pair\} = \frac{3}{6} = 0{,}50$$

PROBABILITE

Exemple 3. On tire une boule dans une urne qui contient 10 boules blanches, 20 boules noires et 30 boules rouges. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche.?

PROBABILITE

Exemple 3. On tire une boule dans une urne qui contient 10 boules blanches, 20 boules noires et 30 boules rouges. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche.?

$$P\ \{\text{boule blanche}\} = \frac{10}{60} = 0{,}16$$

IMPOSSIBILITE, CERTITUDE ET EVENEMENT ALEATOIRE

Un **évènement impossible** (**impossibilité**) est un évènement pour lequel aucune des éventualités pouvant résulter de l'épreuve probabiliste n'est favorable. L'ensemble des éventualités favorables à cet évènement est vide. La probabilité d'un évènement impossible est donc nulle.

$$\mathbf{P\ \{\phi\} = 0}$$

Un **évènement certain** (**certitude**) est un évènement pour lequel toutes les éventualités pouvant résulter de l'épreuve probabiliste sont favorables. L'ensemble des éventualités favorables à cet évènement est l'ensemble fondamental E lui même. La probabilité d'un évènement certain est donc égale à 1.

$$\mathbf{P\ \{E\} = 1}$$

IMPOSSIBILITE, CERTITUDE ET EVENEMENT ALEATOIRE

Entre ces deux extrêmes, évènement impossible et évènement certain, il y a toute la gamme des évènements possibles. Une probabilité est donc toujours comprise entre 0 et 1.

Un **évènement aléatoire** a une probabilité comprise entre 0 et 1.

$$0 =< P <= 1$$

La somme des probabilités de tous les évènements Ai possibles et mutuellement incompatibles est égale à 1 :

$$P \{\Sigma_i A_i\} = 1$$

IMPOSSIBILITE, CERTITUDE ET EVENEMENT ALEATOIRE

Dans l'exemple de l'urne, les probabilités réciproques de tirer une boule blanche, une boule noire et une boule rouge ;

$$P\ \{\text{boule blanche}\} = \frac{10}{60}$$

$$P\ \{\text{boule noire}\} = \frac{20}{60}$$

$$P\ \{\text{boule rouge}\} = \frac{30}{60}$$

La somme de ces probabilités :

$$\frac{10}{60} + \frac{20}{60} + \frac{30}{60} = \frac{60}{60} = 1$$

ESPERANCE MATHEMATIQUE

On appelle **Espérance mathématique** la moyenne arithmétique des valeurs possibles pondérées par leur probabilité :

$$\mathbf{E(X) = \Sigma i\ (pi\ .\ xi)}$$

L'exemple de la loterie permet d'appréhender la signification de cette espérance mathématique.

Dans une loterie, le gain moyen est celui obtenu au cours d'un nombre précis et limité de parties.

L'espérance mathématique correspond au gain moyen sur un nombre théoriquement infini.

Cette espérance est donc inaccessible au joueur mais est un point de repère essentiel pour l'organisateur car elle indique la tendance de gain moyen par partie et lui permet de fixer le prix du billet assurant le bénéfice recherché.

ESPERANCE MATHEMATIQUE

Illustrons le concept avec un exemple simple :

Une tombola prépare 200 billets et assigne un lot de 1000 € au billet gagnant.
La probabilité est de 1/200.

Le montant du gain est de 1000 €.
L'espérance mathématique est de 5 €.

Le prix du billet doit donc être supérieur à 5 € si l'utilisateur espère une marge.

Rappelons aussi le pari de Pascal : même si vous considérez que la probabilité que Dieu existe est faible, la valeur du gain (la vie éternelle !) est telle que l'espérance mathématique est forte.

EVENEMENT COMPLEMENTAIRE

L'évènement complémentaire $\overline{A}$ de l'évènement A est formé par toutes les éventualités possibles et incompatibles qui ne font pas partie de A.

C'est le complément de A par rapport à l'ensemble des évènements E.

Par définition : $P\{A\} + P\{\tilde{A}\} = 1$, d'où :

$$\mathbf{P\{\overline{A}\} = 1 - P\{A\}}$$

EVENEMENT COMPLEMENTAIRE

Dans l'exemple de l'urne, on se propose de calculer l'évènement : tirer une boule noire OU une boule rouge.

La réponse est évidente dès lors qu'on considère la probabilité de l'évènement complémentaire : tirer une boule blanche.

$$P\ \{\text{Noire OU Rouge}\} = 1 - P\ \{\text{Blanche}\} = 1 - \frac{10}{60} = \frac{5}{6}$$

Il faut donc souvent penser à rechercher la probabilité de **l'évènement complémentaire**.

EVENEMENT COMPLEMENTAIRE

On tire 13 cartes dans un jeu de 52 cartes.

Quelle est la probabilité d'obtenir tous les piques ?

Répondre à cette question implique de calculer le nombre d'éventualités équiprobables possibles que comporte le tirage de 13 cartes parmi 52.

Ceci conduit à l'étude des problèmes de **dénombrement**, c'est à dire à **l'analyse combinatoire.**

Celle-ci fait l'objet du paragraphe suivant.