Module 22

MATHEMATIQUES

C02 - PROBABILITES – STATISTIQUES No 2

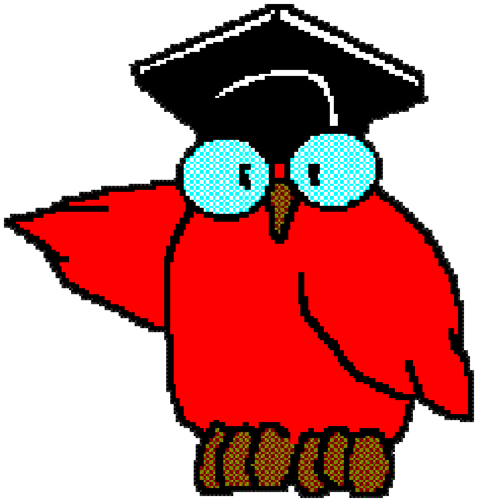
ANALYSE COMBINATOIRE

Objectifs

- Comprendre l'importance de l'analyse combinatoire pour opérer le dénombrement des cas favorables et des cas possibles dans la détermination d'une probabilité

Plan

- Permutations
- Arrangements
- Combinaisons



DISPOSITIONS ORDONNEES ET NON ORDONNEES

- L'analyse combinatoire a pour objet le dénombrement des différentes dispositions que l'on peut former à partir d'un ensemble d'éléments.
- Nous symboliserons les éléments par des lettres.
- Nous distinguerons deux types de dispositions : les dispositions ordonnées et non ordonnées.
- Considérons une escadrille de trois avions, F-AAAA, F-BBBB et F-CCCC

Calcul des probabilités

DISPOSITIONS ORDONNEES ET NON ORDONNEES

- Dans les dispositions ordonnées, deux dispositions contenant les mêmes éléments sont considérées comme différentes si ceux-ci n'occupent pas les mêmes places.
- Si constitue une patrouille avec deux avions, je différencierai la configuration où F-AAAA est le leader et F-BBBB l'ailier de celle ou F-BBBB est le leader et F-AAAA l'ailier.
- Dans les dispositions non ordonnées, deux dispositions composées des mêmes éléments sont considérées comme identiques quelque soient les places occupées par ceux-ci.
- Les deux patrouilles constituées sont considérées comme identiques.

LES PERMUTATIONS

- Une permutation de n éléments est une disposition ordonnée de ces éléments, chacun de ceux-ci figurant une fois et une seule dans chaque permutation.
- Dans notre escadrille de trois avions, nous avons 6 permutations :

1	F-AAAA	F-BBBB	F-CCCC
2	F-AAAA	F-CCCC	F-BBBB
3	F-BBBB	F-AAAA	F-CCCC
4	F-BBBB	F-CCCC	F-AAAA
5	F-CCCC	F-AAAA	F-BBBB
6	F-CCCC	F-BBBB	F-AAAA

- On note Pn le nombre de permutations que l'on peut effectuer avec n éléments
- **Pn = 1 * 2 * 3 * … * n = n!** .

LES PERMUTATIONS

- Avec 3 avions : 3! = 3 * 2 = 6
- Dans le tableur Microsoft Excel, la fonction Factorielle s'écrit =FACT(x)

- Modèle modXL\simul2.xls

LES PERMUTATIONS

- L'Union Européenne comprend désormais 25 pays membres qui, à tour de rôle, président le Conseil pendant 6 mois. Combien y-a-t-il de façons différentes d'organiser l'ordre de succession à la Présidence du Conseil ?

LES PERMUTATIONS

- L'Union Européenne comprend désormais 25 pays membres qui, à tour de rôle, président le Conseil pendant 6 mois. Combien y-a-t-il de façons différentes d'organiser l'ordre de succession à la Présidence du Conseil ?
- Réponse :
- 25 ! = 15 511 210 043 330 985 984 000 000

LES ARRANGEMENTS

- Un arrangement de p éléments choisis dans un ensemble de n éléments est une disposition ordonnée de p de ces n éléments, chacun d'eux ne pouvant figurer plus d'une fois dans le même arrangement.

- On note A_n^p le nombre d'arrangements de p éléments choisis parmi n.

$$A_n^p = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$$

LES ARRANGEMENTS

- Reprenons notre escadrille et voyons comment former nos patrouilles de deux appareils en distinguant leader et ailier :

No Arrangement	Leader	Ailier
1	F-AAAA	F-BBBB
2	F-BBBB	F-AAAA
3	F-BBBB	F-CCCC
4	F-CCCC	F-BBBB
5	F-AAAA	F-CCCC
6	F-CCCC	F-AAAA

- Arrangement de 3 avions 2 à 2

- $$A_3^2 = \frac{3\,!}{(3-2)\,!} = 6$$

LES ARRANGEMENTS

- Si nous avions à former des patrouilles de 3 avions, chacun ayant une place spécifique, à partir d'une escadrille de 7 appareils :

- Si nous avions à former des patrouilles de 3 avions, chacun ayant une place spécifique, à partir d'une escadrille de 7 appareils :

- $$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$$

- Dans le tableur Microsoft Excel, la fonction Arrangement s'appelle PERMUTATION -ce qui n'est pas très heureux, même si un arrangement de n éléments choisi dans un ensemble de n éléments est une permutation- et s'écrit =PERMUTATION(n;p).

- Modèle modXL\simul3.xls

LES ARRANGEMENTS

- 50 candidats se présentent à un concours comportant 5 places. La liste des reçus est triée selon le nombre de points obtenus. Combien y a t il de listes possibles?

LES ARRANGEMENTS

- 50 candidats se présentent à un concours comportant 5 places. La liste des reçus est triée selon le nombre de points obtenus. Combien y a t il de listes possibles?

- $$A_{50}^{5} = \frac{50\,!}{45\,!} = 254\ 251\ 200$$

LES COMBINAISONS

- Une combinaison de p éléments choisis dans un ensemble de n éléments est une disposition non ordonnée de ces p éléments où chacun figure au plus une fois.
- La combinaison est une opération analogue à l'arrangement, mais dans laquelle on ne tient pas compte de l'ordre des éléments. Que l'avion F-AAAA occupe la place de leader ou d'ailier n'importe pas.
- On note C_n^p le nombre de combinaisons de p éléments choisis parmi n.

$$C_n^p = \frac{n\,!}{p!\ (n-p)\,!}$$

LES COMBINAISONS

- Reprenons notre escadrille et voyons comment former des patrouilles de deux appareils sans attribuer un rôle particulier aux pilotes :

No Combinaison	Avion 1	Avion 2
1	F-AAAA	F-BBBB
1 (la même)	F-BBBB	F-AAAA
2	F-AAAA	F-CCCC
2 (la même)	F-CCCC	F-AAAA
3	F-BBBB	F-CCCC
3 (la même)	F-CCCC	F-BBBB

LES COMBINAISONS

- Combinaisons de 3 avions 2 à 2

- $$C_3^2 = \frac{3\,!}{2\,!\,(3-2)\,!} = 3$$

- Combinaisons de 7 avions 3 à 3

- Dans le tableur Microsoft Excel, la fonction Combinaison s'appelle COMBIN et s'écrit =COMBIN(n;p)

- Modèle modXL\simul4.xls

LES COMBINAISONS

- En 1943, vous êtes chargé d'organiser un convoi de vivres et de munitions pour le port russe de Mourmansk.
- Dans le port il y a 4 escorteurs, 7 cargos et 3 porte-avions.
- Votre convoi doit comporter un escorteur de tête, 3 cargos, 1 porte-avion et un escorteur de queue.
- Combien d'organisations possibles ?

LES COMBINAISONS

- En 1943, vous êtes chargé d'organiser un convoi de vivres et de munitions pour le port russe de Mourmansk. Dans le port il y a 4 escorteurs, 7 cargos et 3 porte-avions. Votre convoi doit comporter un escorteur de tête, 3 cargos, 1 porte-avion et un escorteur de queue. Combien d'organisations possibles ?
- Possibilités de choix pour le premier escorteur = 4
- Possibilités de choix pour les 3 cargos = C_3^7 = 35
- Possibilités de choix pour le dernier escorteur = 3 (choix réduit par la sélection de l'escorteur de tête.
- D'où : 4 * 35 * 3 * 3 = 1260

LES COMBINAISONS

Nous retrouvons nos 50 candidats qui se présentent à un concours comportant 5 places. La liste des reçus est triée cette fois selon l'ordre alphabétique. Combien y a t il de listes possibles ?

LES COMBINAISONS

Nous retrouvons nos 50 candidats qui se présentent à un concours comportant 5 places. La liste des reçus est triée cette fois selon l'ordre alphabétique. Combien y a t il de listes possibles ?

$$C_{50}^{5} = \frac{50\,!}{5\,!\,45\,!} = 2\,118\,760$$

PROPRIETES DES COMBINAISONS

Propriété No 1 : A partir d'un arrangement de p éléments choisis parmi n, on obtient p! combinaisons en permutant les p éléments.

$$p\,!\;C_n^p = A_n^p = \frac{n\,!}{(n-p)\,!}$$

Propriété No 2 : En raison de la symétrie de la formule :

$$C_n^p = C_n^{n-p}$$

Propriété No 3 :

$$C_n^p = C_{n-1}^p + C_{n-1}^{p-1}$$

La démonstration de la propriété No 3 :

Soit les n éléments a, b, ...n. Le nombre de combinaisons que l'on peut effectuer avec ces n éléments est égal à la somme du nombre des combinaisons contenant l'élément a et du nombre de combinaisons ne le contenant pas.

On peut former toutes les combinaisons contenant a en ajoutant à celui-ci (p-1) éléments choisis parmi les (n-1) éléments différents de a. Le nombre de combinaisons contenant a est donc :

$$C_{n-1}^{p-1}$$

PROPRIETES DES COMBINAISONS

Le nombre de combinaisons ne contenant pas a sont obtenues en choisissant p éléments parmi les (n-1)

$$C_{n-1}^{p}$$

Par conséquent :

$$C_{n}^{p} = C_{n-1}^{p} + C_{n-1}^{p-1}$$

Propriété No 4 (Développement du binôme de Newton) :

$$(p + q)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k \, q^{n-k}$$

La démonstration de la propriété No 4 :

$(p + q)^2 = p^2 + 2pq + q^2$

$(p + q)^3 = p^3 + 3 p^2 q + 3 q^2 p + q^3$

....

$(p + q)^n = p^n + C_n^1 p^{n-1} q + \ldots + C_n^k p^k q^{n-k} + \ldots + q^n$

En effet, dans cette expression, on obtient un terme en $p^k q^{n-k}$ en choisissant p dans k des n facteurs (p+q) composant $(p + q)^n$, k étant pris dans les (n - k) facteurs restants. On pourra donc former autant de termes $p^k q^{n-k}$ qu'il y a de façons de choisir k facteurs dans l'ensemble des n facteurs. L'ordre des facteurs n'intervenant pas, on obtient C_n^k termes $p^k q^{n-k}$.

PROPRIETES DES COMBINAISONS

Remarque : En faisant dans la formule du binôme de Newton:

p = q = 1

on obtient le résultat remarquable suivant :

$$\mathbf{C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n}$$

La somme des coefficients du développement du binôme de Newton est égale à 2^n.

DISPOSITIONS SANS REPETITION ET AVEC REPETITION

Introduisons une nouvelle distinction entre dispositions, selon que les éléments qui les constituent peuvent y figurer une seule ou plusieurs fois.

Dispositions sans répétition : un même élément ne peut figurer qu'une seule fois dans une disposition. Les dispositions sans répétition correspondent au schéma de tirages sans remise, dit encore tirages exhaustifs, dans une urne (ou dans un jeu de cartes).

Dispositions avec répétition : un même élément peut figurer plusieurs fois dans une dispositions. Les dispositions avec répétition correspondent au schéma de tirages avec remise, dits encore tirages indépendants, dans une urne (ou dans un jeu de cartes).

Exemple

En disposant deux à deux les éléments de l'ensemble {a,b}, on peut faire deux dispositions ordonnées sans répétition :

(a,b)   (b,a)

et quatre dispositions ordonnées avec répétition :

(a,a) (a,b) (b,a) (b,b)

LES ARRANGEMENTS AVEC REPETITION

Un arrangement avec répétition de p éléments choisis dans un ensemble de n éléments est une disposition ordonnée des éléments choisis, chacun pouvant figurer plusieurs fois (jusqu'à p fois) dans le même arrangement.

Exemple / Soit un ensemble de 4 éléments { a,b,c,d}. Arrangeons les 2 à 2 avec répétition. On obtient :

ab	ba
ac	ca
ad	da
bc	cb
bd	db
cd	dc
aa	bb
cc	dd

soit 16 arrangements avec répétition.

On note Anp le nombre d'arrangements avec répétition de p éléments choisis parmi n. On a :

$$A_n^p = n^p$$

APPLICATION DE L'ANALYSE COMBINATOIRE AU CALCUL DES PROBABILITES

Rappelons la question posée à la fin du chapitre précédent. On a 13 cartes dans un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir tous les piques ?

Puisque l'ordre dans lequel les cartes ont été tirées n'a pas d'importance, il s'agit de combinaisons. Un jeu de 52 cartes permet C_{52}^{13} combinaisons de 13 cartes. Toutes sont équiprobables si la distribution a été faite au hasard. Une seule est favorable.

La probabilité :

$$P\ \{\text{tous les piques}\} = \frac{1}{C_{52}^{13}} = + \frac{1}{635\ 013\ 559\ 600}$$

Exercice

Sachant qu'un joueur joue 5000 parties de poker par an, combien de temps doit il jouer pour récupérer un carré d'as à la première donne ?

Exercice

Sachant qu'un joueur joue 5000 parties de poker par an, combien de temps doit il jouer pour récupérer un carré d'as à la première donne ?

Le nombre de mains possibles de 5 cartes avec un jeu de 52 est :

C_{52}^{5} = 2 598 960

Sur ce nombre, seules 48 ont les 4 as (Chaque combinaison de 4 as incorpore l'une des 48 autres cartes restantes).

La probabilité d'avoir 4 as lors d'une partie est donc : 48/2 598 960 = 0,00001847

Avec 5000 parties, la probabilité est de : 0,09234463

Il faut jouer près de 11 ans (10,8) pour que cette probabilité atteigne 1.

Exercice

Une boîte de 20 pièces de rechange contient 18 bonnes et 2 défectueuses. On prélève au hasard 6 pièces dans la boîte. Quelle est la probabilité que 5 de ces pièces exactement soient bonnes ?

Exercice

Une boîte de 20 pièces de rechange contient 18 bonnes et 2 défectueuses. On prélève au hasard 6 pièces dans la boîte. Quelle est la probabilité que 5 de ces pièces exactement soient bonnes ?

L'ordre du choix des 6 pièces n'a pas d'importance et le nombre total de façons de choisir ces pièces est le nombre de manières de choisir 6 éléments dans un ensemble de 20, à savoir, C_{20}^{6}.

Le nombre de choix qui contiennent exactement 5 bonnes pièces et une mauvaise est égal au nombre de manières de choisir 5 pièces à partir de 18 objets, à savoir C_{18}^{5}, multiplié par le nombre de façons de choisir 1 objet à partir de 2, à savoir C_{2}^{1}.

La probabilité que l'évènement survienne est égale à :

$$\frac{C_{18}^{5} \cdot C_{2}^{1}}{C_{20}^{6}}$$

Cette probabilité vaut 0,44.

Problème #2

8 personnes autour d'une table ronde

Combien de dispositions possibles sachant que 2 personnes ne peuvent rester ensemble ?

Problème #2

8 personnes autour d'une table

Combien de dispositions possibles sachant que 2 personnes ne peuvent rester ensemble ?

Nombre de cas possibles en tenant compte de la position = Nombre d'arrangements = n!

Mais la table est ronde : il y a n possibilités de construire chaque arrangement. Le nombre de cas possibles :

$(n!)/n = (n-1)!$

Les incompatibilités : il y a $(n-2)!$ possibilités de placer les autres convives. Pour chacune de ces possibilités il y a 2 mauvais placements, la combinaison Autres, A, B et la combinaison Autres, B, A (Du fait de la rotondité de la table, A, B, Autres et B,A, Autres sont équivalents aux premiers).

Le nombre de cas acceptables est donc $(n-1)! - 2*(n-2)!$

Pour n=8 => 3 600