Module 23

MATHEMATIQUES

C03 - PROBABILITES – STATISTIQUES No 3

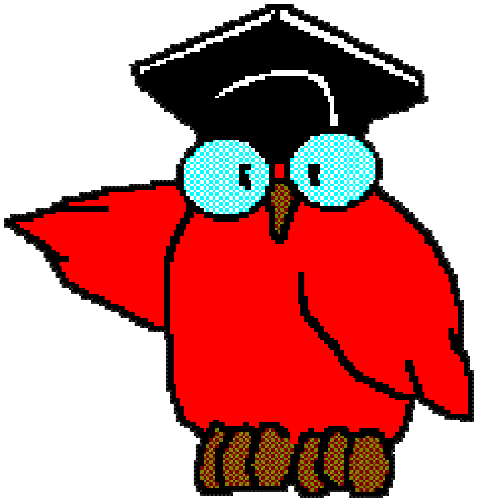
REGLES DU
CALCUL DES PROBABILITES

Objectifs

- Comprendre les atouts de l'algèbre des ensembles pour résoudre certains problèmes de probabilités

Plan

- Diagrammes de Venn
- Opérations sur les ensembles
- Nouvelle approche des probabilités
- Théorème des probabilités totales



LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

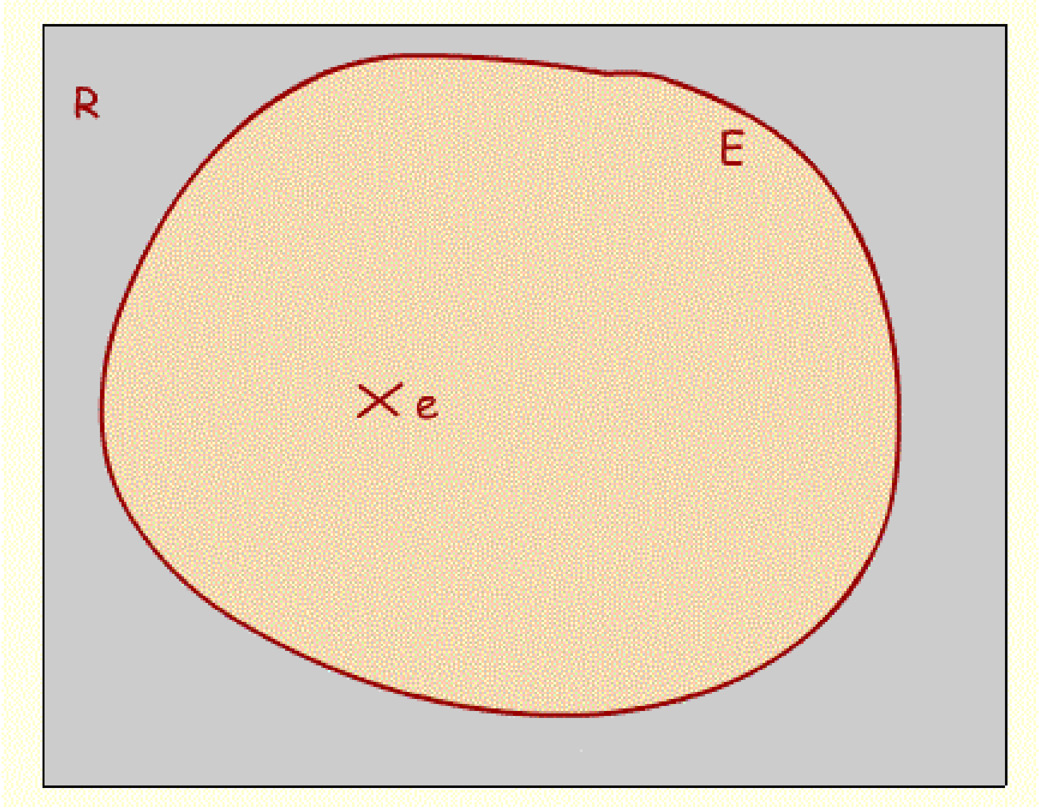
- Un **ensemble** est une collection d'objets ou d'évènements, appelés éléments ayant comme caractère commun d'appartenir à l'ensemble.
- Le nombre n d'éléments d'un ensemble E est appelé son **cardinal**. On note :
- $|E| = n$
- **Appartenance**
- Si e est un élément de l'ensemble E, on écrit
- $e \in E$

LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

- **Le diagramme de Venn**
- Comme Euler dans ses "Lettres à une Princesse d'Allemagne", écrites en 1760, on peut représenter un ensemble E par une surface "patatoïde" délimitée par un trait.
- Cette surface est inscrite dans un rectangle R qui représente le référentiel que nous nommerons ensemble fondamental.
- On remarquera que les éléments qui composent l'ensemble n'interviennent pas dans ce type de représentation. Certains la font remonter à G.W. Leibniz (1646-1716)
- Pour plus de clarté, nous transigerons à cette règle dans les animations en y faisant figurer un élément e
- La première utilisation de tels diagrammes en logique. Les Américains leur donnent aujourd'hui le nom de diagrammes de Venn bien que John Venn n'ait publié sa "Symbolic logic" qu'en 1894.

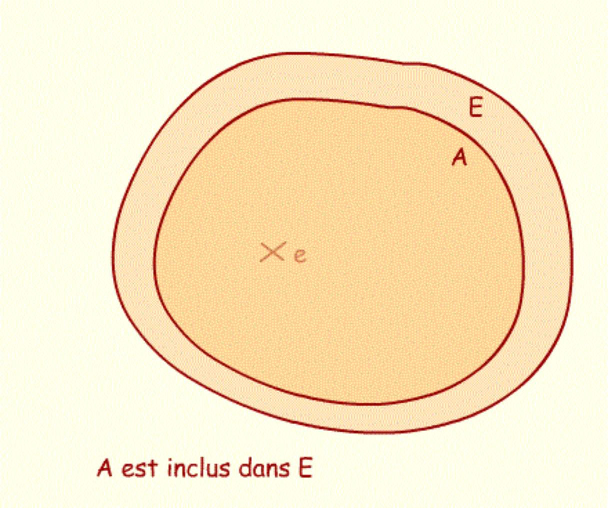
LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

- **Le diagramme de Venn**

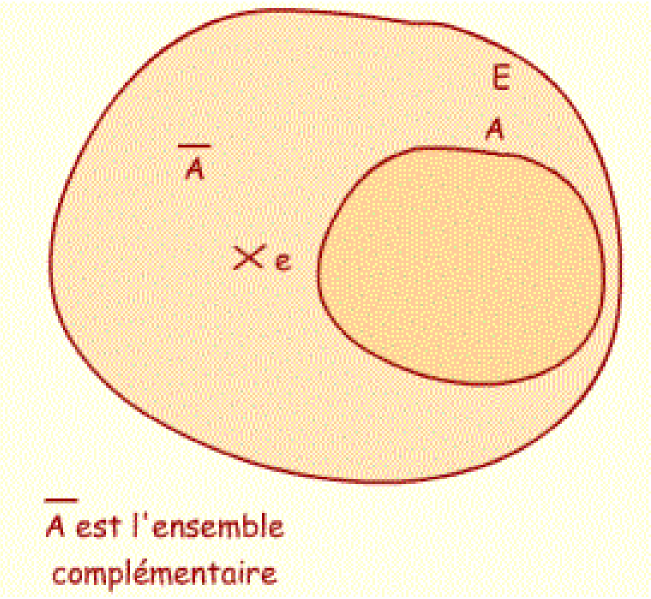


LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

- **La relation d'inclusion**
- Un ensemble A est inclus dans un ensemble E si chaque élément de A appartient aussi à E.
- $e \in A \;\Rightarrow\; e \in E$
- On écrit alors que $A \subset E$ ou $E \supset A$
- On dit que A est une partie ou un sous-ensemble de E.



- **Partie vide**
- L'ensemble vide est l'ensemble qui ne comporte pas d'éléments. On le désigne par le symbole $\varnothing$.
- Soit A une partie de E. Le complémentaire de A par rapport à E, noté $\overline{A}$ est constitué de tous les éléments de E qui n'appartiennent pas à A.
- $e \in \overline{A} \Leftrightarrow e \notin A$
- Le symbole $\Leftrightarrow$ signifie "équivalent à"



LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

- **Ensemble des parties d'un ensemble**
- Soit l'ensemble E = {a, b, c, d}
- Formons toutes les parties possibles de E :

- ∅
  {a} ,{b} ,{c} ,{d}
  {ab} ,{ac} ,{ad} ,{bc}, {bd} ,{cd}
  {abc} ,{abd} ,{acd} ,{bcd}
  {abcd}

  Elles forment un nouvel ensemble appelé ensemble des parties de E et noté P (E).

- Rappelons que l'ensemble E lui-même et l'ensemble vide ∅ appartiennent à l'ensemble des parties de E :
- $E \in P(E)$ $\quad \varnothing \in P(E)$

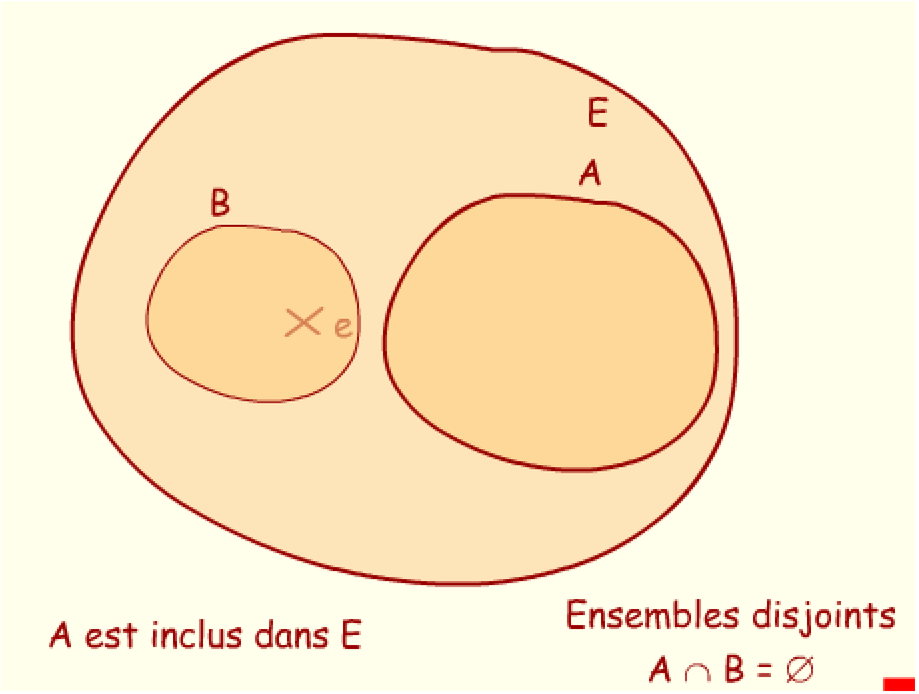
LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

- En formant les parties de E, nous avons constaté que celle-ci étaient constituées par les combinaisons que l'on peut constituer avec les éléments appartenant à l'ensemble. Un ensemble à n éléments a donc :
- $$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n \text{ parties}$$

LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

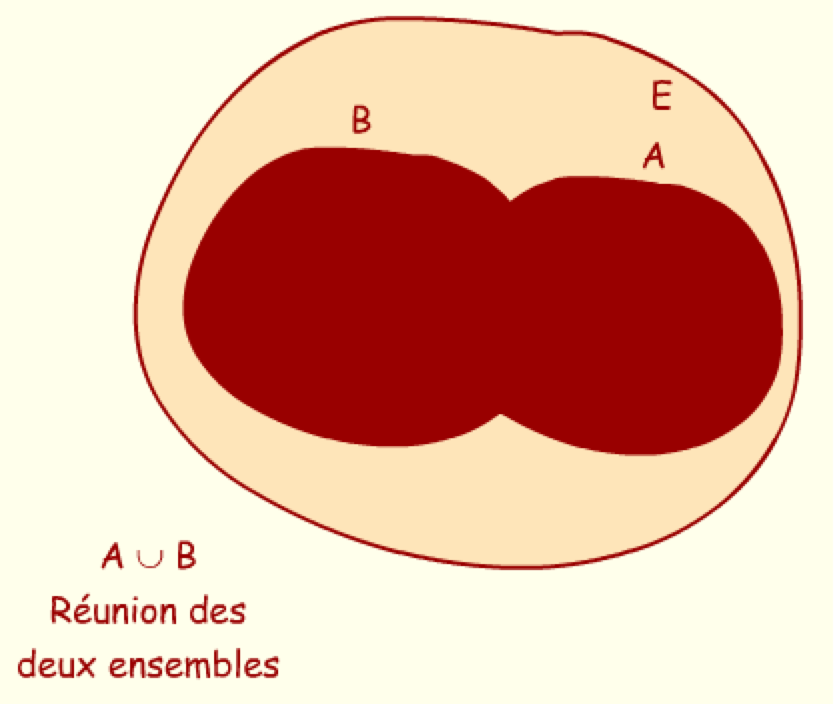
- Si deux ensembles sont disjoints

$$A \cap B = \varnothing$$



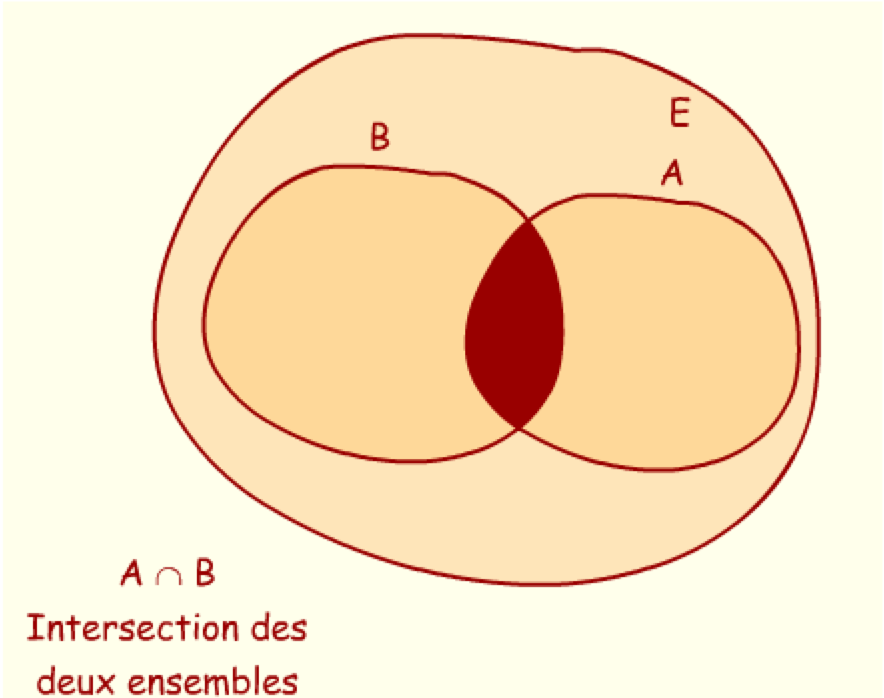
LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

- On appelle **union** ou **réunion** de A et B, l'ensemble R formé des éléments appartenant à A ou à B (éventuellement aux deux).
- On note : **$R = A \cup B$**



LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

- On appelle **intersection** de A et de B, l'ensemble I formé des éléments appartenant à la fois à A et B.
- On note : $\mathbf{I = A \cap B}$
- Si A et B sont disjoints, leur intersection est l'ensemble vide



LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

- Les opérations de réunion et d'intersection possèdent les propriétés de **commutativité, d'associativité et de distributivité**. Ces dernières sont particulièrement utiles.
- Distributivité de la réunion par rapport à l'intersection
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- Distributivité de l'intersection par rapport à la réunion
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

- **Partition d'un ensemble**
- On appelle partition d'un ensemble E un ensemble de parties {A1, A2, A3, ... An} non vides, disjointes deux à deux et dont la réunion est égale à l'ensemble E:
- Ai = $\varnothing$ pour toutes les valeurs de i
- Ai $\cap$ Aj = $\varnothing$ avec i $\neq$ j
- Les parties Ai sont appelées les classes de la partition.
- Si les éléments de l'ensemble sont des éventualités, une partition revient à décomposer l'ensemble fondamental, tel que nous l'avons défini dans le chapitre 1, en évènements mutuellement incompatibles. Ceux-ci forment alors ce qu'on appelle un système complet d'évènements.
- Le système complet d'évènements d'un lancement de 2 pièces est {Pile-Pile, Pile-Face, Face-Pile, Face-Face}

- **Dualité et complémentation**
- Les propriétés algébriques de l'union et de l'intersection vont par deux. Par exemple, la propriété :
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
- a son expression duale, qui s'en déduit en échangeant les symboles $\cup$ et $\cap$:
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- Cette dualité résulte de ce que, à chaque partie A de E, on peut associer sa complémentarité Ā

LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

- **Différence**
- La différence A - B de deux parties A et B est constituée par les éléments de A qui ne sont pas éléments de B :
- $A - B = A \cap \overline{B}$

LE LANGAGE DE L'ALGEBRE DES ENSEMBLES

Les **lois de Morgan** fournissent les règles de calcul relatives à l'opération de complémentation :

Loi 1 : La complémentaire d'une réunion est l'intersection des complémentaires

$$\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

Loi 2 : La complémentaire d'une intersection est la réunion des complémentaires

$$\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Ces lois se démontrent aisément avec les diagrammes de Venn

Problème #1

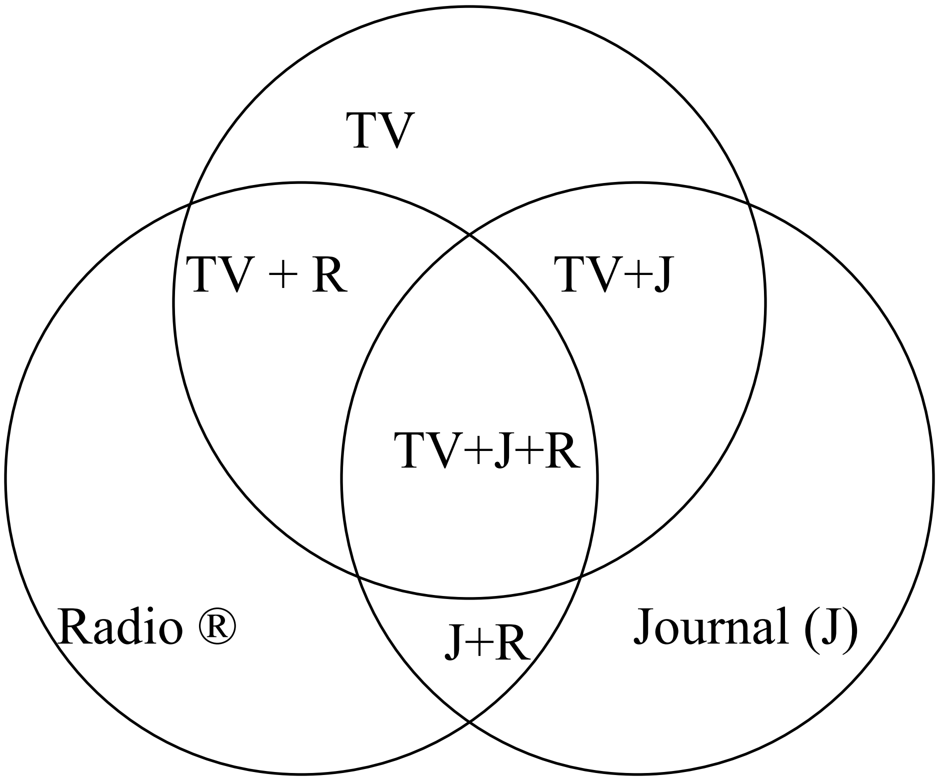
Sur 150 personnes :

- 65 regardent la télévision
- 60 écoutent la radio
- 50 lisent un journal
- 35 regardent la télévision et écoutent la radio
- 25 regardent la télévision et lisent un journal
- 30 lisent un journal et écoutent la radio
- 10 regardent la télévision, écoutent la radio et lisent un journal

Combien de personnes ne regardent que la télévision ?

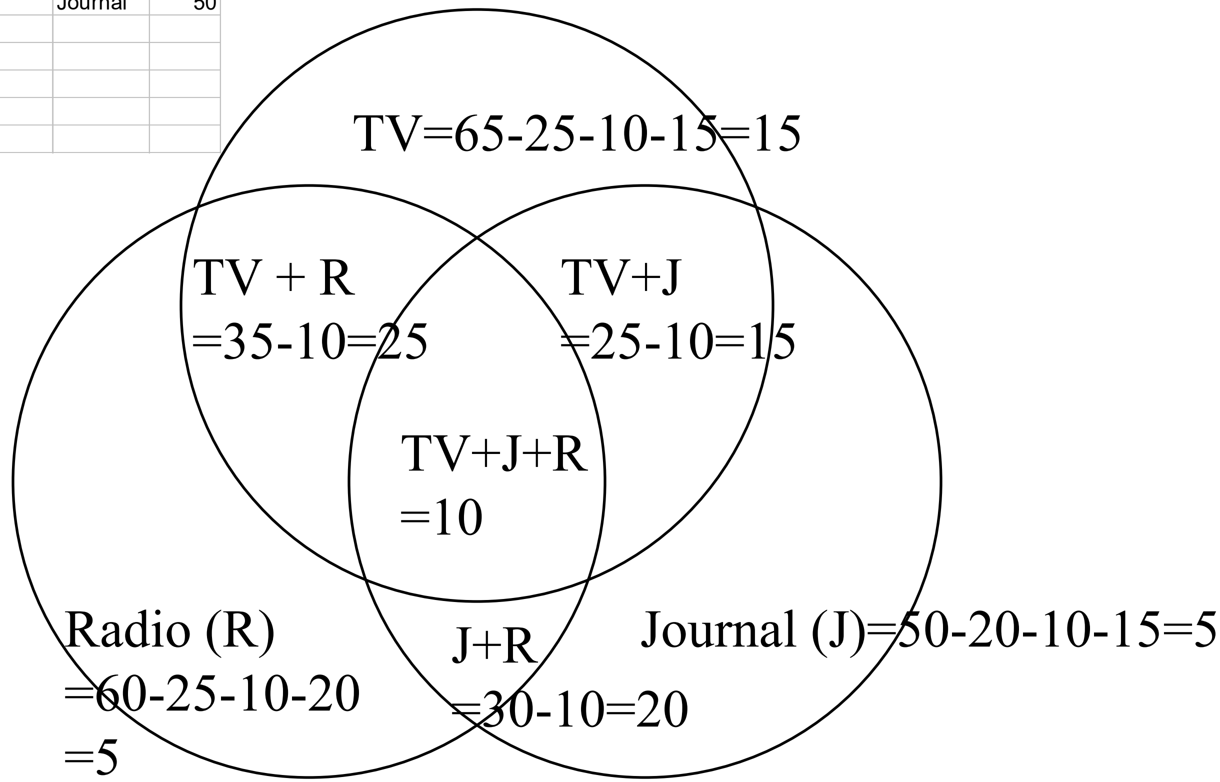
Combien de personnes n'ont pas d'activité ?

Problème #1

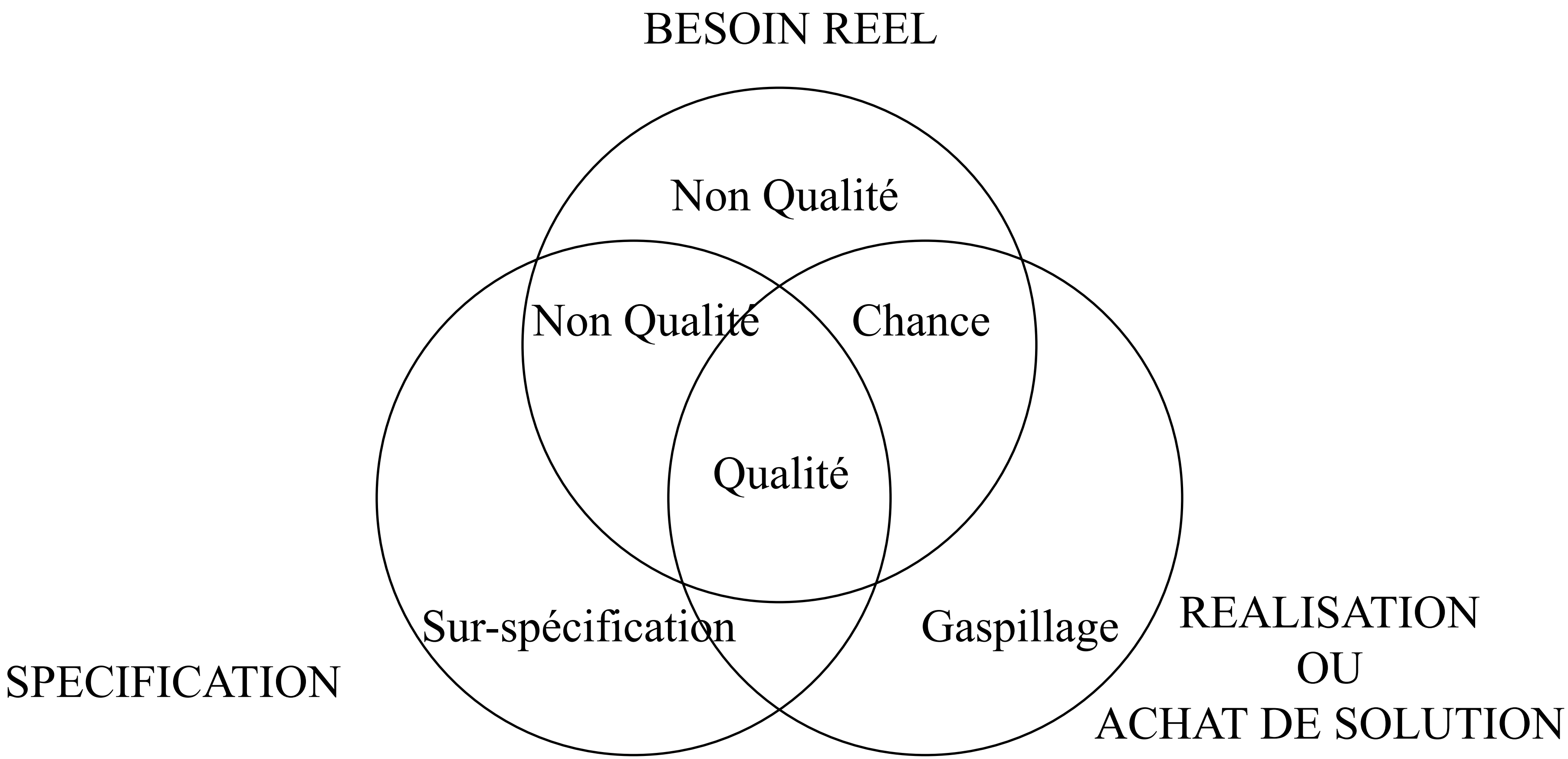


Problème #1

TV seul	15			
Radio seul	5			
Journal seul	5			
TV + Radio sans J	25		TV	65
TV + Journal sans Radio	15		Radio	60
Journal + Radio sans TV	20		Journal	50
Les 3	10			
	95			
Total	150			
Solde	55			



Intérêt pour votre métier de cette approche : problématique de l'acheteur



Une nouvelle approche du calcul des probabilités

- La théorie des probabilités a été redéfinie d'une manière plus rigoureuse au plan mathématique à la lumière des règles de l'algèbre des ensembles.
- Ceci impose un référentiel de postulats ou axiomes, desquels on tire un certain nombre de théorèmes.
- Les **régles du calcul des probabilités** indiquent comment il est possible de déterminer la probabilité d'un évènement défini à partir des opérations logiques que nous venons d'étudier, effectuées sur les parties de l'ensemble fondamental.
- Ces règles sont introduites sous forme d'axiomes qui généralisent les résultats variables dans le cas où il est possible de définir l'ensemble fondamental comme un ensemble d'évènements élémentaires équiprobables.
- Si on interprète les probabilités d'évènements comme des modèles de fréquence de réalisation d'évènements lors de multiples répétitions d'une expérience donnée, ces probabilités auront les propriétés essentielles de ces fréquences.

Une nouvelle approche du calcul des probabilités

- **Axiome No 1** : Une probabilité est donc un nombre compris entre 0 et 1 parce que la fréquence relative est un nombre compris entre 0 et 1.
- **Axiome No 2** : La probabilité de l'évènement E, où E est l'ensemble fondamental, est égale à 1 parce qu'un des résultats possibles est certain de se produire quand l'expérience est réalisée.
- **Axiome No 3** : Si deux évènements A et B sont disjoints, la probabilité de la réunion de ces évènements doit être égale à la somme des probabilités de ces deux évènements parce que pour ces évènements la fréquence relative de réalisation de A et B est égale à la fréquence relative de réalisation de A plus la fréquence relative de réalisation

Une nouvelle approche du calcul des probabilités

Autres axiomes :

Soit l'ensemble fondamental E et F la famille des évènements.

La famille F des évènements est une classe de parties de l'ensemble fondamental

Les évènements A1, A2, An appartiennent à F

Une mesure de la probabilité P est une fonction à valeur réelle définie sur un ensemble fondamental E telle que :

1. $0 <= P(A) <= 1$
2. $P(E) = 1$
3. $P(A1 \cup A2 \cup ... An) = P(A1)+P(A2)+...+P(An)$

On pourra aussi dire que P est une application P de F dans [0,1]

Une nouvelle approche du calcul des probabilités

Propriétés :

$P(\emptyset) = 0$

$P(\tilde{A}) = 1 - P(A)$

Si $A \subset B$, $P(A) <= P(B)$

On tire aussi de ces axiomes deux théorèmes très importants qui vont constituer les principales règles de calcul qui s'appliquent aux probabilités : le **théorème des probabilités totales** et le **théorème des probabilités composées**.

Le théorème des probabilités totales

Les applications des probabilités envisagent souvent plusieurs évènements combinés plutôt qu'un seul évènement.

Considérons deux évènements A1 et A2 associés à une expérience.

Il est souvent intéressant de savoir si, lorsque l'expérience se produit, A1 et A2 se réalisent tous les deux ou si un seul des évènements se produit.

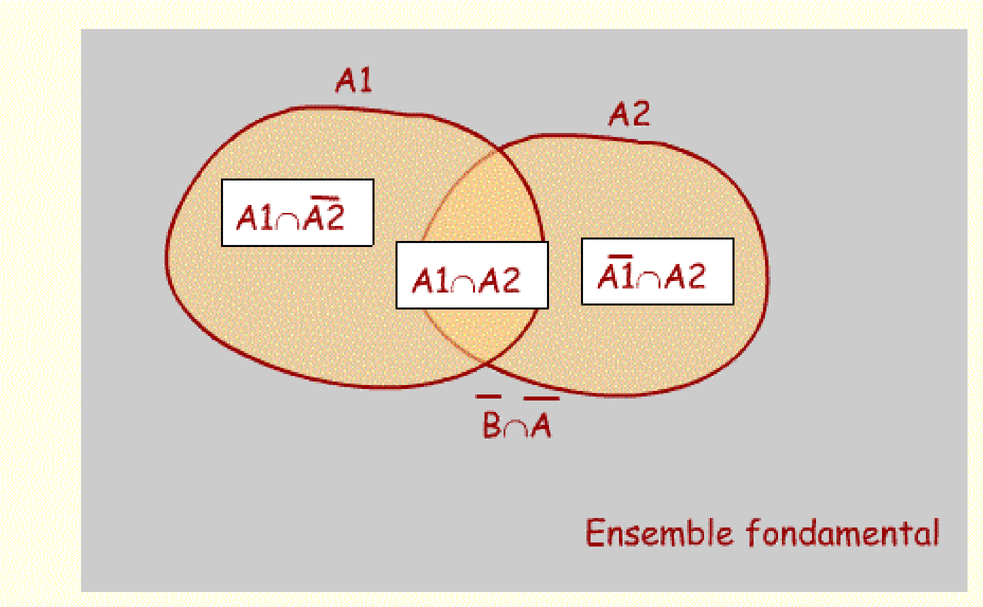
L'algèbre des ensembles nous fournit un mode de représentation pour ces probabilités :

La probabilité pour que les deux évènements surviennent : $P(A1 \cap A2)$ - Probabilité A1 ET A2

La probabilité pour qu'un seul des évènements surviennent : $P(A1 \cup A2)$ - Probabilité A1 OU A2

Le théorème des probabilités totales

- Supposons que les points de l'ensemble fondamental correspondant aux réalisations de A1 et A2 soient des points à l'intérieur de deux aires désignées respectivement A1 et A2.
- On peut donc représenter le diagramme de Venn, figuré sur le schéma interactif ci-dessous (désactivé).
- En passant la souris sur les équations ensemblistes définissant chaque zone du diagramme, vous faîtes apparaître la probabilité correspondante.



Le théorème des probabilités totales

La probabilité que l'un de deux évènements survienne est égale à la somme des trois probabilités mises en évidence sur le schéma : la probabilité d'avoir A1 sans A2, le probabilité d'avoir A2 sans A1 et la probabilité d'avoir les deux.

$$P(A1 \cup A2) = P(A1 \cap \overline{A2}) + P(\overline{A1} \cap A2) + P(A1 \cap A2)$$

Nous voyons aussi sur le même diagramme que

$$P(A1) = P(A1 \cap \overline{A2}) + P(A1 \cap A2)$$

$$P(A2) = P(A2 \cap \overline{A1}) + P(A1 \cap A2)$$

La combinaison de ces trois expression permet, en éliminant $P(\tilde{A}1 \cap A2)$ et $P(A1 \cap \tilde{A}2)$ de la première grâce aux deux dernières, d'obtenir l'expression suivant pour la probabilité recherchée :

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) - P(A1 \cap A2)$$

Le théorème des probabilités totales

THEOREME DES PROBABILITES TOTALES

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) - P(A1 \cap A2)$$

La probabilité de trouver des comptables avec des cheveux verts OU des yeux mauves s'obtient en additionnant la probabilité d'avoir des cheveux verts quelque soit la couleur des yeux à la probabilité d'avoir des yeux mauves quelque soit la couleur des cheveux. A ce résultat il faut cependant retirer la probabilité d'observer simultanément cheveux verts et yeux mauves car cet événement est inclus à la fois dans A et dans B, donc compté deux fois.

Le théorème des probabilités totales : cas des évènements qui s'excluent

Si les deux ensembles du diagramme précédent sont disjoints, deux évènements A1 et A2 n'ont aucun point commun. On dit qu'ils sont mutuellement exclusifs.

$P(A1 \cap A2) = 0$

La formule devient alors :

FORMULE PARTICULIERE DES PROBABILITES TOTALES

Si A1 et A2 sont des évènements mutuellement exclusifs

$$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$$

On peut généraliser ces formules à n évènements (n > 2).

Exemples d'applications

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes : Probabilité d'avoir un coeur ou un roi ?

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes : Probabilité d'avoir un as ou un roi ?

Exemples d'applications

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes : Probabilité d'avoir un coeur ou un roi ?

P(1 roi ou un coeur) = P(1 coeur) + P(1 roi) - P(roi de coeur) (cas général)

$$P = \frac{4}{13} = \frac{1}{4} + \frac{1}{13} - \frac{1}{52}$$

On tire une carte dans un jeu de 52 cartes : Probabilité d'avoir un as ou un roi ?

P(1 roi ou un as) = P(1 as) + P(1 roi) (cas des évènements qui s'excluent)

$$P = \frac{2}{13} = \frac{1}{13} + \frac{1}{13}$$

Exemples d'applications

On jette deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir soit un total de 7, soit un total de 11 points ?

Exemples d'applications

On jette deux dés. Quelle est la probabilité d'obtenir soit un total de 7, soit un total de 11 points ?

A1 est la probabilité d'obtenir un total de 7.

A2 est la probabilité d'obtenir un total de 11 points.

Ces évènement sont mutuellement exclusifs.

6 arrangements permettent d'obtenir A1 : (1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2) et (6,1)

2 arrangements permettent d'obtenir A2 : (5,6) et (6,5)

$$P(A1) = \frac{6}{36} \quad P(A2) = \frac{2}{36} \quad P(A1 \cup A2) = \frac{6}{36} + \frac{2}{36} = \frac{8}{36}$$

INDEPENDANCE ET INCOMPATIBILITE.

Il est important de ne pas confondre les notions d'indépendance et d'incompatibilité.

L'incompatibilité va de pair avec l'exclusion.

Deux évènements A et B sont **exclusifs** ou **incompatibles** si, lorsque A se réalise, B ne peut pas se réaliser et réciproquement (Tirer une carte qui soit à la fois un cœur et un pique : réalisation simultanée impossible).

Nous avons vu que lorsque deux évènements sont exclusifs, $P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2)$

Deux évènements A et B sont **indépendants** si la réalisation de A n'est pas influencée par la réalisation de B et réciproquement.

Deux évènements indépendants sont nécessairement compatibles mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Nous verrons dans le paragraphe suivant la traduction mathématique de l'indépendance

Exercice

L'éclairage d'une pièce nécessite l'emploi de 2 lampes.

Soit A1 l'évènement : la 1ère lampe est défaillante - P(A1) = 0,12

Soit A2 l'évènement : la 2nde lampe est défaillante - P(A2) = 0,18

On donne $P(A1 \cap A2) = 0,07$. Probabilité pour que les 2 lampes fonctionnent ?

Exercice

L'éclairage d'une pièce nécessite l'emploi de 2 lampes.

Soit A1 l'évènement : la 1ère lampe est défaillante - P(A1) = 0,12

Soit A2 l'évènement : la 2nde lampe est défaillante - P(A2) = 0,18

On donne $P(A1 \cap A2) = 0{,}07$. Probabilité pour que les 2 lampes fonctionnent ?

Par hypothèse $P(A1 \cap A2) = 0{,}07$ qui est $\neq 0$

F et G ne sont pas mutuellement exclusifs.

$P(A1) * P(A2) = 0{,}12 * 0{,}18 = 0{,}0216$ qui est $\neq$ $P(A1 \cap A2)$

F et G ne sont pas indépendants

L'évènement "Au moins une lampe est défaillante" = $P(A1 \cup A2)$

$P(A1 \cup A2) = P(A1) + P(A2) - P(A1 \cap A2)$

$= 0{,}12 + 0{,}18 - 0{,}07 = 0{,}23$

L'évènement "Les deux lampes fonctionnent" est l'évènement contraire du précédent.

$P(\overline{A1 \cup A2}) = 1 - P(A1 \cup A2) = 1 - 0{,}23 = 0{,}77$

Exercice

La probabilité qu'un moteur à piston sur un monomoteur tombe en panne en 1925 était 0,005.

La probabilité qu'un moteur à piston sur un bimoteur tombe en panne en 1925 était 0,003.

Quel est l'avion le plus sûr ?

Exercice

La probabilité qu'un moteur à piston sur un monomoteur tombe en panne en 1925 était 0,005.

La probabilité qu'un moteur à piston sur un bimoteur tombe en panne en 1925 était 0,003.

Quel est l'avion le plus sûr ?

Probabilité pour qu'au moins un des moteurs tombe en panne sur le bimoteur

Evénement "1er moteur 1 fonctionne" : 1-0,003 = 0,997

Evénement "2eme moteur fonctionne" : 1 - 0,003 = 0,997

Probabilité que les deux moteurs fonctionnent : 0,997 * 0,997 = 0,994009

Probabilité pour qu'au moins un des moteurs tombe en panne : 1 - 0,994009 = 0,005991

La panne d'un seul des 2 moteurs au décollage est critique, surtout avec une charge exceptionnelle en carburant (Crash de Fonck).

Le monomoteur est donc plus sûr, malgré la fiabilité moindre de son moteur.

C'est ce raisonnement qui a poussé Lindbergh a voler sur un monomoteur Ryan pour traverser l'Atlantique Nord, alors que tous ceux qui avaient tenté avant lui -et échoué- étaient partis sur des bimoteurs. Son choix fut le bon.